

Les grêlons de Syracuse

Divertissement numérique et/ou casse-tête mathématique.

Divertissement ou casse-tête ? Chacun choisira en fonction de sa curiosité naturelle.

Commençons par un exercice simple ne réclamant ni outil particulier, ni connaissances mathématiques dépassant le programme de calcul de l'école primaire. Les Anciens pourront même, pour ce tout début, se souvenir des séances de calcul mental avec lesquelles nos maîtres d'école débutaient le programme du matin.

Le jeu, car à ce stade on peut encore parler d'un jeu, consiste à choisir un nombre a et s'il est pair, à le diviser par 2 ($a/2$) et s'il est impair, à le multiplier par 3 puis à ajouter 1 au résultat ($(a \times 3)+1$), et on recommence avec le nombre obtenu et ainsi de suite.

Pour débiter appliquons tout ceci au chiffre 1, ce qui nous conduit aux trois étapes suivantes:

1. 1 étant impair est multiplié par 3 et en ajoutant 1 au résultat on obtient 4;
2. 4 étant pair est divisé par deux ce qui donne 2;
3. 2 étant pair est divisé par deux ce qui nous ramène à 1, notre point de départ.

Bien sûr, nous pouvons continuer, mais nous obtiendrons la suite sans fin :

1,4, 2, 1,4, 2, 1,4, 2, 1... et ainsi de suite.

Ne nous attardons pas sur ce cas quelque peu simpliste et attaquons-nous à des nombres plus importants, quitte cette fois à faire appel au crayon, au papier, voire à la calculatrice. Restons cependant modestes, car même avec cette dernière, la tâche devient rapidement fastidieuse. C'est ainsi qu'on pourra aisément obtenir toute une série de suites comme celles apparaissant dans ce tableau pour les valeurs de 3 à 9 :

3		10	5	16	8	4	2	1											7	16		
4		2	1																2	2		
5		16	8	4	2	1													5	16		
6		3	10	5	16	8	4	2	1										7	16		
7		22	11	34	17	52	26	13	40	20	10	5	16	8	4	2	1		16	52		
8		4	2	1															3	4		
9		28	14	7	22	11	34	17	52	26	13	40	20	10	5	16	8	4	2	1	19	52

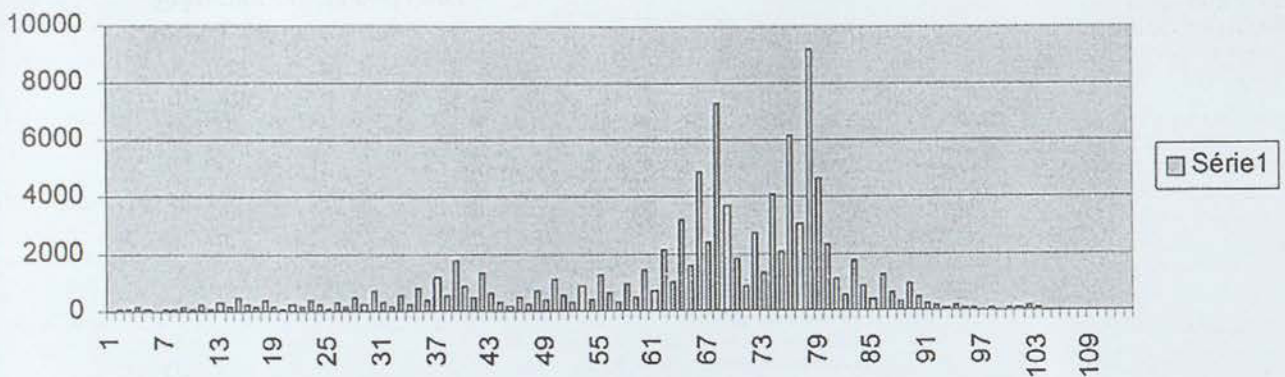
Les deux dernières colonnes de droite font apparaître respectivement, le nombre de membres de chaque suite et la valeur maximale atteinte dans celle-ci.

On notera immédiatement que chacune de ces suites se termine par 1 (compte tenu de ce qui a été dit précédemment, il n'a pas paru utile de faire apparaître la boucle infinie 1421421). On peut, dès lors, se poser la question : est-ce que ce résultat est généralisable à des nombres plus grands ? Les courageux pourront reprendre leur calculette ; ceux-ci devront cependant rapidement s'effacer devant les «titilleurs» de micros qui, eux, pourront s'attaquer à des nombres réclamant de longs calculs difficilement envisageables avec une simple calculette. Un tableur Excel (ou plus simple encore, comme les tableurs de Work sur PC ou de ClarisWork sur Mac) ou un petit logiciel programmé au

déclaré que «les mathématiques ne sont pas prêtes pour de tels problèmes».

Reste la possibilité de travailler à augmenter l'intervalle des nombres pour lesquels on a effectivement vérifié qu'ils conduisaient bien à des suites se terminant par 1421421...². Mais là, on sort du domaine des micros pour entrer dans celui des gros calculateurs, un domaine difficilement accessible aux Anciens.

Il y aurait également beaucoup à dire sur la longueur des suites créées, et sur les valeurs maximales atteintes à l'intérieur de chaque suite. Les curieux pourront se reporter aux livres cités en note de bas de page ou se lancer dans un surf sur Internet où ils trouveront de nombreux sites traitant du sujet³.



moyen de VisualBasic sur PC ou RealBasic sur Mac, feront parfaitement l'affaire et permettront d'étendre cet exercice à des nombres de valeur respectable. Et là, surprise : quelle que soit la valeur d'entrée, la suite créée se termine toujours, après un nombre de calculs plus ou moins grand, par 1 unité. Il est dès lors tentant d'extrapoler gaillardement ce résultat à l'ensemble des nombres. C'est cependant aller un peu vite en besogne.

Fin de jouer, nous entrons maintenant, dans le domaine des mathématiciens et chacun sait que les mathématiciens ne croient que dans ce qui a été démontré. Et c'est là que le bât blesse, personne jusqu'ici, et ce malgré de nombreuses tentatives, n'a réussi à démontrer que ce que nous avons présenté jusqu'ici comme un aimable passe-temps, s'applique à l'ensemble des nombres. Alors si quelque Ancien, suffisamment courageux et fort en maths, veut avancer une démonstration, je lui souhaite bon courage et bonne chance tout en lui suggérant de la présenter non à Arc-en-ciel, mais à quelque aréopage de mathématiciens.¹

Sans vouloir décourager les téméraires qui oseraient s'attaquer à ce problème, j'indiquerai cependant, «qu'aux dires de quelques mathématiciens parmi les plus grands de notre époque, ce problème ne sera pas résolu avant longtemps» et que le mathématicien Paul Erdos (1913-1996) a même

Ah, j'allais oublier : pourquoi ce titre à résonance météorologique. Simplement parce que quelque(s) mathématicien(s) américains a (ont) pensé que les mouvements des grêlons qui, au cours de leur croissance, montent et descendent plusieurs fois, avant de rejoindre le sol, matérialisent assez bien les fluctuations des termes de nos suites dont la valeur «monte»et «descend» plusieurs fois, avant de rejoindre inéluctablement la valeur unité.

Oui, mais pourquoi de Syracuse : parce que nous sommes là encore dans le domaine de l'exception française qui a préféré à l'appellation « suite des grêlons» celle de «suite de Syracuse» pour honorer l'université américaine qui s'intéressa à ces suites dès 1950.

Ne voulant pas trancher dans ce débat linguistique, j'ai lâchement adopté une solution mi-figue, mi-raisin qui satisfait, à la fois, la francophonie et la terminologie la plus répandue.⁴

• Henri Treussart •

1/ Les Anciens voudront bien considérer que les renseignements fournis dans les deux paragraphes qui précèdent, correspondent à la situation du sujet traité telle qu'elle était en 1990, au moment de la parution du livre qui m'a servi de source : « DITES UN CHIFFRE, Idées et problèmes mathématiques qui défient toute intelligence» de Malcom E. (Traduit et publié seulement en 1999, chez Flammarion)

2/ En 1991, cet intervalle couvrait tous les nombres jusqu'à 10⁹ (un million de milliards).

3/ Utiliser comme thème de recherche : «suite», «suite de Syracuse», «suite des grêlons», «maths» etc.

4/ Là, je triche un peu. En fait l'appellation «suite de grêlons» est loin d'être universelle. Pour certains, on parle encore de «problème 3N+1». Pour d'autres de «problème de Collatz» du nom de celui qui, il y a environ 70 ans, aurait, pour la première fois, signalé ce problème à l'attention des mathématiciens. On pourrait penser, qu'il aurait été judicieux, selon le vieux principe qu'il faut rendre à César ce qui appartient à César, d'adopter partout cette dernière appellation, ce qui aurait eu l'avantage de pérenniser le nom de «l'inventeur».